数理解析研究所講究録
1138 巻 2000 年 56-63

線形写像による判定を用いた代数方程式の実解の代数的解法について

詫間電波高専　近藤　祐史(Yuji Kondoh) *
上智大学理工学部　齋藤　友克(Tomokatsu Saito) †
富士通研究所　竹島　卓(Taku Takeshima) ‡

概　要

We consider to solve a zero-dimensional polynomial system using Gröbner bases. It is roughly divided into two methods. First, we compute a Gröbner basis with respect to lexicographical order, and solve an univariate polynomial in the Gröbner basis. All zeros are calculated by substitution. The problem in this case is cumulative errors. Second, we compute univariate polynomials for each variable, and calculate zero intervals of them respectively. we verify that exact solutions are contained in a candidate interval of their combinations.

In this paper we focus on second method and propose a method to verify whether exact solutions are contained in any candidate using a linear map. We illustrate that our method is faster than circumscribed sphere method which is a way with similar situation.

1　はじめに

代数的に定義された方程式系がゼロ次元である場合、すべての解の値を絶対誤差で求めることは代数方程式が高次である場合や近接解が存在する場合は、方程式によりさまざまな工夫を凝らす必要がある。しかし、代数的な手法のみを使ったアルゴリズムを構築すれば、すべての解を求める一元的なアルゴリズムとなるはずである。そこで、本稿では Gröbner 基底 [2] を用いた代数方程式系のすべての実解を求める方法を考える。Gröbner 基底を用いた方法は大別すると、2 つの方法がある。1 つ目は、辞書式順序の Gröbner 基底を計算し、その中に現れる 1 変数多項式を Sturm の方法を用いて解く。その結果を他の式に代入することによりすべての解を求める方法である。この方法では、Gröbner 基底中の 1 変数多項式の係数に比べ、他の式の係数が非常に大きくなり、代入による誤差の累積が問題で

*kondoh@dc.takuma-ct.ac.jp
†saito@mm.sophia.ac.jp
‡tak@para.flab.fujitsu.co.jp

ある。この問題を解決するために、解の有理式表現 [1] が考案されているが、やはり累積誤差の問題が生じる。もう一つの方法としては、誤差の伝搬の問題を無くすために、すべての変数について 1 変数多項式を計算し、それらについて Sturm の方法により必要な精度で解を求める。得られた解を組み合わせることによって元の方程式の解を得る方法である。この方法では、組み合わせよって得られる解候補から元の代数方程式系の解を見つけ出す検証方法が重要になる。

本稿では、後者の方法を考える。アルゴリズムの概略としては、各変数の最小多項式を Gröbner 基底により文献 [8] の手法により求め、得られた最小多項式の解の存在範囲を Sturm の定理により判定する。n 次元超矩形を Sturm の定理により確定する。すべての解はこれら各変数に対する区間の組合せの中に存在する。全ての組合せは格子状に配列された超矩形の集合となるが、これらの中から真に解を含む超矩形を判定すればよい。

同様な立場の方法として、沢田は、超矩形の外接球を考えることにより解が含まれるかどうかを判定する外接球法を提案している [7]。筆者の一人斎藤は、この文献の存在を知らずに、同様な方法で解の判定ができることを発表した [5]。また、沢田は変数の数が増加すると超矩形の数が組合せ爆発を起こす恐れがある問題を回避するために、解候補の絞り込み法を提案している。

我々が提案する方法は、超矩形の判定のために線形写像 [3][4] を用いる。解候補の超矩形の像が共通部分を持たない線形写像を構成し、写像先の変数に対する最小多項式の符号判定により対応する超矩形が解を含むか否かを判定する。そのため、沢田の外接球法に比べ、高速に処理することができる。また、沢田の絞り込み方法と同様にして、超矩形数の組合せ爆発に対して、高速に処理できる。

2 外接球法

本章では、沢田により発表された外接球法について簡単に述べる。

2.1 解候補の検証法

n 変数 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の方程式 $F = \{f_1, f_2, \cdots, f_s\}$ より、Gröbner 基底を用いることにより 1 変数方程式を求める。各変数に対し 1 変数方程式を許容誤差 $E = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n\}$ で近似解を求める。求めた解の組合せにより、F の解を判定する。そのとき、解候補とその許容誤差で作られる超矩形の外接球を考え、その球内に真の解があるかどうかを判定する。具体的には、$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を解候補とすると、元の方程式 F と外

接球の方程式 $\sum_{j=1}^{n}(x_j-a_j)^2-r^2$ より、r に関する 1 変数方程式 $g(r)$ を計算する。

$$g(r)=UnivariatePolynomial(r,\{F,\sum_{j=1}^{n}(x_j-a_j)^2-r^2\})$$

とする。ただし、$UnivariatePolynomial$ は、1 変数多項式の導出を意味する。このとき $g(r)$ が、

$$0\le r^2<\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j^2$$

に解を持つとき、$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ は近似解であると判定する。

2.2 解候補の絞り込み方法

解候補の数は変数の増加とともに組合せ爆発的に増える。そのため、以下の解候補の絞り込みを行う。この方法は、先ず (x_1,x_2) の組を見つけ、つぎにその結果に x_3 の候補を加え、(x_1,x_2,x_3) の組を見つける。というように、1 変数ずつ増やしてその都度解候補を減らしていく。具体的には、

$$h_k(t_k)=UnivariatePolynomial(t_k,\{F,\sum_{j=1}^{k}x_j-t_k\})$$

$(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ を解候補とすると、$h_k(t_k)$ が、

$$\sum_{j=1}^{k}(a_j-\epsilon_j)<t_k<\sum_{j=1}^{k}(a_j+\epsilon_j)$$

に解を持つとき、$(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ は解の候補である。

2.3 アルゴリズム

前節をまとめ、外接球法のアルゴリズムはつぎのようになる。

アルゴリズム **1** (外接球法)
入力: $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_s\}$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 許容誤差 $E=\{\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n\}$
出力: F の解のリスト

1. $\{f_1,f_2,\cdots,f_s\}$ の辞書式順序 の *Gröbner* 基底により、x_i の *1* 変数多項式 $g_i(x_i)$ をすべて求める。

2. 各 $g_i(x_i)$ に対する *Sturm* 列を求め、解を許容誤差 ϵ_i で求める。

3. 許容誤差の条件を調べ、満足していなければ許容誤差を修正し、解を求め直す。

4. 解候補を絞り込む。

5. 解候補 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対し、$\{F, \sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j)^2 - r^2\}$ の辞書式順序の *Gröbner* 基底により、r の *1* 変数方程式 $g(r)$ を求める。

6. $g(r)$ が $0 \leq r^2 < \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j^2$ に実根を持つかどうかを *Sturm* 列により判定する。

3 提案する方法

3.1 線形写像

前章の外接球法では、解候補が真の解かどうかを判定するのに外接球を用いたが、提案する方法では線形写像を用いる。今、$\mathbb{Q}$ 上の区間の集合を $X_i = \{[l_1^{(i)}, r_1^{(i)}], \cdots, [l_m^{(i)}, r_m^{(i)}]\}$, $i = 1, \cdots, n$ とする。ここで、各係数は以下の条件を満足していると仮定する。

$$
\begin{aligned}
&l_1^{(i)} = 0 < r_1^{(i)} < l_2^{(i)} < \cdots < l_m^{(i)} < r_m^{(i)} \\
&M_i = r_m^{(i)} - l_1^{(i)} \\
&W_i = \max_{j=1,\cdots,m}\{r_j^{(i)} - l_j^{(i)}\} \\
&G_i = \min_{j=2,\cdots,m}\{r_j^{(i)} - l_{j-1}^{(i)}\}
\end{aligned}
$$

ここで、M_i は各変数における解の最大距離、$W = i$ は最大幅、G_i は解の最小距離を表す。この X_i の直積を $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ とする。X は n 次元空間の中の m^n 個の超矩形のなす集合である。また 1 から m までの自然数の集合を Λ とし Λ の n 個の直積を Λ^n とすれば、Λ^n の各元 λ と X の各元は自然な対応により 1 対 1 の対応が存在する。

補題 2 線形写像 $\psi(x_1, x_2) = x_1 + \alpha_2 x_2$ が

$$
\frac{M_1}{G_2} < \alpha_2 < \frac{G_1}{W_2}
$$

を満足すれば、$X_1 \times X_2$ の任意の相異なる 2 元 I_1,I_2 の ψ による像は共通部分を持たない。

このとき、

$$
\begin{aligned}
M &= \alpha_2 M_2 + M_1 \\
G &= \min\{G_1, \alpha_2 G_2 - M_1\}
\end{aligned}
$$

とすると、

$$
\frac{M}{G_i} < \alpha_i < \frac{G}{W_i}
$$

のようにこの補題を繰り返し適用すれば、

$$\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

となる線形写像が構成できる。ただし、$\alpha_1 = 1$ とする。この線形写像は、構成法より

$$\Psi(X_{\lambda_i}) \cap \Psi(X_{\lambda_j}) = \phi, \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

を満足する。

3.2 代数方程式の求解

$\mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n]$ 上の代数方程式系 $\{f_1, \cdots, f_s\}$ が与えられたとする。さらに必要な解の絶対精度を ε とする。提案するアルゴリズムは以下のとおりである。

アルゴリズム **3** (提案した方法)

1. $\{f_1, f_2, \cdots, f_s\}$ のなすイデアル$\mathcal{I}$の *Gröbner* 基底を求める。

2. イデアル$\mathcal{I}$に関する x_i の最小多項式 $g_i(x_i)$ を *Gröbner* 基底を使って求める。

3. 各 $g_i(x_i)$ に対する *Sturm* 列を求め、解を含む幅 ε 以下となる区間 X_i を求める。

4. 補題 *2* を繰り返し適用し線形写像 Ψ を求める。$u = \Psi(x_1, ..., x_n)$ とする。もし、線形写像が構成できない場合は、ε を修正し、区間 X_i を求める。

5. イデアル$\mathcal{I}$に対する u の最小多項式 $h(u)$ を求める。

6. $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の元である各々の超矩形の Ψ による像の中に $h(u)$ の解が存在するか否かを符号変化により判定する。

以上の手順によって解が存在する範囲が確定できる。しかし、変数が増えると解候補が組み合わせ爆発的に増えるため、実際には次節に述べる解候補を絞り込ながら判定回数を減らす高速化を行う。

3.3 絞り込みによる高速化

外接球法で行われているの解候補の絞り込みと同様に、提案した線形写像を用いて、x_1, x_2, x_1, x_2, x_3, $x_1, x_2, x_3, \cdots$ と変数を増やしながら解の組を見つけることができる。アルゴリズム 3 の解の組を判定する部分を以下のアルゴリズムに置き換える。

アルゴリズム **4** (**絞り込みによる高速化**)

入力: F の Gröbner 基底 GB, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, A_i : x_i 区間解のリスト, α_i : 線形写像の係数.

出力: F の区間解のリスト.

for $k = 2$ **to** n

  $h := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j xj$

  $h_k :=$ *SquarefreePolynomial*(*MinimalPolynomial*(GB, h))

endfor

$B := \{([l^{(1)}, r^{(1)}]) | [l^{(1)}, r^{(1)}] \in A_1)\}$

for $k = 2$ **to** n

  $A' := B$

  $B := \phi$

  while $A' \neq \phi$

    $([l^{(1)}, r^{(1)}], [l^{(2)}, r^{(2)}], \cdots, [l^{(k-1)}, r^{(k-1)}]) :=$ *FirstElement*(A')

    $A' := A' \backslash \{([l^{(1)}, r^{(1)}], [l^{(2)}, r^{(2)}], \cdots, [l^{(k-1)}, r^{(k-1)}])\}$

    $A'_k := A_k$

    while $A'_k \neq \phi$

      $[l^{(k)}, r^{(k)}] :=$ *FirstElement*(A'_k)

      $A'_k := A'_k \backslash \{[l^{(k)}, r^{(k)}]\}$

      if $h_k(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j l^{(j)}) \cdot h_k(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j r^{(j)}) < 0$

      then

        $B := B \cup \{([l^{(1)}, r^{(1)}], [l^{(2)}, r^{(2)}], \cdots, [l^{(k)}, r^{(k)}])\}$

      endif

    endwhile

  endwhile

endfor

return B

4 実行例

次の方程式および Katsura4 を例として実解を求めることにより、実行時間を測定する。

$$F1 = \begin{cases} yx^3 - \frac{1}{4}x^2 + (y^3 - \frac{9999}{10000}y)x - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}, \\ x^3 - yx^2 + (y^2 - \frac{100001}{100000})x - y^3 + y - \frac{1}{100000} \end{cases}$$

$$F2 = \begin{cases} \frac{93392896}{15625}x^6 + (\frac{94359552}{625}y^2 + \frac{91521024}{625}y - \frac{249088}{125})x^4 + (\frac{1032192}{25}y^4 - 36864y^3 \\ - \frac{7732224}{25}y^2 - 207360y + \frac{770048}{25})x^2 + 65536y^6 + 49152y^5 - 135168y^4 \\ - 72704y^3 + 101376y^2 + 27648y - 27648, \\ \frac{560357376}{15625}x^5 + (\frac{377438208}{625}y^2 + \frac{366084096}{625}y - \frac{996352}{125})x^3 + (\frac{2064384}{25}y^4 - 73728y^3 \\ - \frac{15464448}{25}y^2 - 414720y + \frac{1540096}{25})x, \\ (\frac{188719104}{625}y + \frac{91521024}{625})x^4 + (\frac{4128768}{25}y^3 - 110592y^2 - \frac{15464448}{25}y - 207360)x^2 \\ + 393216y^5 + 245760y^4 - 540672y^3 - 218112y^2 + 202752y + 27648 \end{cases}$$

$$F3 = \begin{cases} y^2x - z^2, \\ 2x^4 + (y^3 - 3y - 6)x - 2y^4 + (z-2)y^2 + 10y - z, \\ x^4 - 9x^3 + (2y^2 + 4z + 9)x^2 + (-4y - 4z + 1)x \\ + y^4 + 4y^3 + 5y^2 + (2z - 4)y + 2z^2 - 6z - 4 \end{cases}$$

それぞれのタイミングデータを表 2 に示す。1 変数多項式の導出時間およびその Sturm 列による求解の時間は内数である。計算は、FreeBSD 3.3 AMD K6-III 450MHz 256MBytes Memory の PC 上の asir (Version 991006) で行った。時間の単位は秒で、garbage collection 時間は含めていない。

表 2: タイミングデータ

	F_1	F_2	F_3	Katsura4
UP	0.025	0.037	0.896	0.314
Sturm	0.325	0.272	9.095	3.621
外接球法	3.398	12.19	1366	83.59
提案した方法	0.417	0.378	13.26	6.487

UP: 1 変数多項式の導出　　Sturm: Sturm の方法による 1 変数多項式の求解

表 2 より、外接球法に比べ線形写像による判定の方が高速に処理できることがわかる。また、提案した方法では半分以上の時間は、1 変数多項式の導出とその求解に使われている。

5 まとめ

代数方程式を解く方法として、Gröbner 基底を利用して各変数毎に 1 変数方程式を導いて、各変数の解を求め、それらを組み合わせて解を得る場合に有効な線形写像を用いる解の判定法を提案した。本アルゴリズムの特徴として、代数方程式が代数的に定義されていれば、指定された絶対誤差の範囲で解を分離することが可能となる。指定された絶対誤差の精度では解を分離できない場合に関しても自動的に誤差精度を向上させて必ず分離でき

るアルゴリズムである。同様な方法として沢田により提案されている外接球法と比べ、高速に処理できることを例により示した。

今後の課題として、1 変数方程式の解法の高速化、提案した線形写像の係数が存在するための厳密な解析などがある。

参 考 文 献

[1] Alonso, M. et al.: Zeros, Multiplicities and Idempotents for Zero Dimensional Systems, Algorithms in Algebraic Geometry and Applications, Progress in Mathematics 143, pp.1–20, (1996).

[2] Becker, T., Weispfenning, V.: Gröbner Bases, Graduate Texts in Math. 141, Springer-Verlag, (1993).

[3] 齋藤, 近藤, 三好, 竹島: 2 変数代数曲線の忠実な描画, (投稿中).

[4] 齋藤 友克, 近藤 祐史, 竹島 卓: 任意精度によるゼロ次元代数方程式の解の位置判定, 数式処理, Vol.7, No.3, pp.39–40, (1999).

[5] 齋藤 友克, 野田 松太郎: 代数方程式系のゼロ次元の解の存在位置の判定, 数式処理, Vol.6, No.1, pp.4–5, (1997).

[6] 齋藤 友克, 野田 松太郎: 2 変数代数方程式の実特異点を含む区間の決定, *Proc. 2nd Risa Consortium*, pp. 131–139, (1998).

[7] 沢田 浩之: 新たな条件式の導入による多変数連立代数方程式の解法, 情報処理学会論文誌, Vol.36, No.12, pp.2761–2770, (1995).

[8] Yokoyama,T.,Noro,M.,Takeshima,T.: Solutions of Systems of Algebraic Equations and Linear Maps on Residue Class Ring, *J.Symb. Comp.* Vol.14, pp. 399–417, (1992).